

# Turbulencia y multifractalidad ochenta años después de la teoría de Kolmogorov 1941

Carlos Granero-Belinchón

La turbulencia es un fenómeno omnipresente en la naturaleza, que interviene en procesos tan diversos como reacciones químicas, flujos atmosféricos o dinámicas galácticas. Sin embargo, numerosas incógnitas continúan envolviéndola y convirtiéndola en un desafío para la ciencia.

**H**oy, la naturaleza multiescala de la turbulencia es aceptada por la comunidad científica. De hecho, la visión que actualmente prevalece de un flujo turbulento es la de un conjunto de torbellinos de distintos tamaños que interactúan entre sí. Sin embargo, no fue hasta 1941 que el físico y matemático Andrey N. Kolmogorov presentó la primera teoría capaz de describir las propiedades estadísticas multiescala de la turbulencia. Dicha teoría, conocida como de Kolmogorov 1941, caracteriza la distribución de energía de la turbulencia a través de las escalas. Además permite recuperar la cascada de energía, ya predicha por Richardson, que atraviesa las escalas de la turbulencia yendo de las grandes escalas hacia las pequeñas. La teoría de Kolmogorov de 1941 revolucionó la comprensión física de la turbulencia.

## Introducción a la física de un fluido turbulento

La turbulencia es uno de los fenómenos de la física clásica que aún permanece sin respuesta. Un fenómeno que ha interesado al ser humano desde hace más de 500 años, quizás por su complejidad, o por su impacto en las dinámicas oceánicas y atmosféricas que determinan el clima, por su influencia en los procesos termodinámicos que han permitido el desarrollo tecnológico de la sociedad industrial, o quizás simplemente por la belleza inherente a un flujo turbulento (Figura 1).

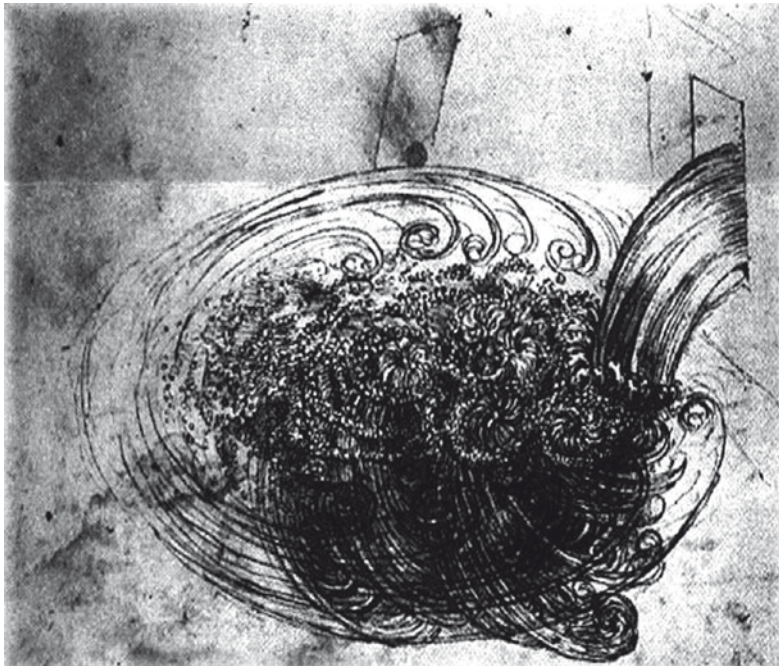
Alrededor del año 1500, Leonardo da Vinci ya se interesaba, al menos desde un punto de vista estético, por el problema de la turbulencia. En la Figura 2 podemos observar un boceto de Da Vinci en el que representa la dinámica turbulenta de un fluido como una superposición de torbellinos de distintos tamaños. Junto a dicho boceto, Da Vinci escribió: “Observad el movimiento de la superficie del agua, que se parece al del cabello, que contiene dos movimientos, uno de los cuales está causado por el peso del cabello, y el otro por la dirección de los rizos; así el agua tiene movimientos de remolino, uno de los cuales es debido a la corriente principal y el otro al movimiento aleatorio e inverso”. Y también: “Los pequeños remolinos son casi innumerables, y los cuerpos

de gran tamaño son movidos solo por los remolinos grandes y no por los pequeños, mientras que los objetos pequeños son movidos tanto por los pequeños remolinos como por los grandes”. Da Vinci indicaba ya hace 500 años la naturaleza multiescala de la turbulencia.

Habría que esperar doscientos cincuenta años para que, gracias a los trabajos pioneros de Leonhard Euler (1707-1783) y más adelante de Claude-Louis Navier (1785-1836)



Figura 1. Cruzando el lago Poyang. Pintura del siglo XVIII proveniente de la región de Cantón, en China. (Derechos: Hong Kong Maritime Museum).



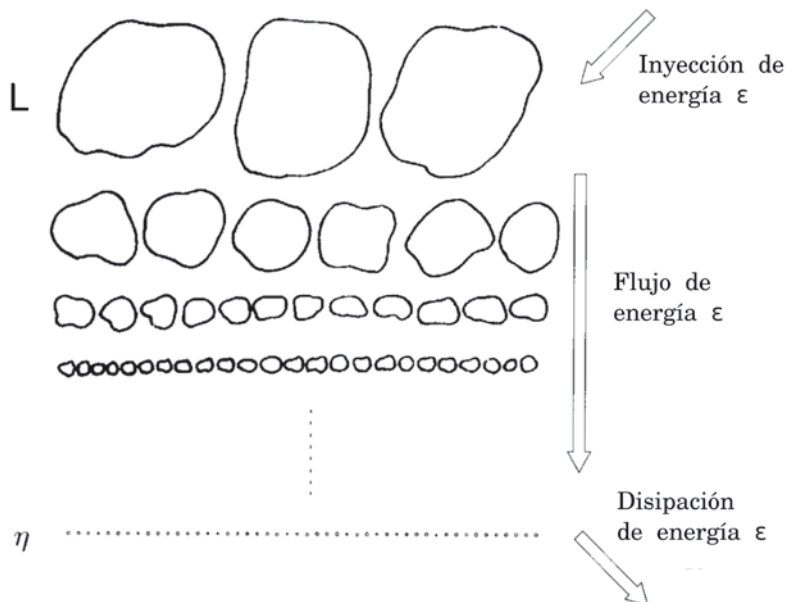
**Figura 2.** Dibujo de un fluido entrando en una piscina realizado por Leonardo da Vinci (xv-xvi).

y George Gabriel Stokes (1819-1903), tuviesemos una descripción matemática de la dinámica de un flujo turbulento. Gracias a ellos, hoy sabemos que la dinámica de un fluido de viscosidad  $\nu$  y densidad  $\rho$  esta gobernada por las ecuaciones de conservación del momento o ecuaciones de Navier-Stokes (N-S). En el caso de un fluido homogéneo ( $\rho \equiv \text{cte}$ ), la conservación de la masa implica  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  y las ecuaciones de Navier-Stokes se escriben:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (1)$$

donde  $p$  es la presión y  $\mathbf{v}$  el campo de velocidades. Las ecuaciones de Navier-Stokes muestran la competición entre las diferentes fuerzas que actúan en el fluido:

**Figura 3.** Descripción de Richardson de la turbulencia [1].



- $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  son los términos inerciales. El primero indica la variación temporal de la velocidad, mientras que el segundo, que es no lineal, describe la advección.
- $-\frac{\nabla p}{\rho}$  es la fuerza interna.
- $\nu \nabla^2 \mathbf{v}$  es el término de difusión debido a la viscosidad del fluido.

La competición entre el término no lineal advectivo y el término lineal difusivo define el número de Reynolds  $R_e$ , que mediante análisis dimensional, puede expresarse como [1]:

$$R_e \approx -\frac{\sigma L}{\nu}, \quad (2)$$

donde  $\sigma$  es la velocidad característica del fluido a la escala característica  $L$  del flujo. Cuanto mayor es el número de Reynolds, mayor es la importancia del término advectivo en N-S y más turbulenta es la dinámica del fluido. En régimen turbulento, la fuerte no linealidad de N-S hace muy complicado trabajar analíticamente con estas ecuaciones. Desde la física, dos aproximaciones al problema han permitido comprender mejor la turbulencia, la aproximación fenomenológica y la estadística.

En 1921, Lewis Fry Richardson (1881-1953) presentó una visión de la turbulencia que todavía prevalece, según la cual la turbulencia se describe como una jerarquía de torbellinos de diferentes tamaños, con una cascada de energía de los grandes torbellinos hacia los pequeños [2] (Figura 3). Esta descripción implica que la energía es inyectada en el sistema a través de las grandes escalas, mientras que es en las pequeñas escalas donde la energía es disipada. Por lo tanto, la descripción de Richardson de la turbulencia implica que esta es un fenómeno multiescala (Figura 4).

Sin embargo, la primera teoría estadística capaz de caracterizar y describir la turbulencia como un fenómeno multiescala llegaría a mediados del siglo xx con los trabajos revolucionarios de Andrey Nikolayevich Kolmogorov (1903-1987). Inspirado por la visión de la turbulencia de Richardson, A. N. Kolmogorov construyó la teoría de la turbulencia conocida como "Kolmogorov 1941", o de forma abreviada como K41.

### La teoría de Kolmogorov

Kolmogorov comenzó por diferenciar tres dominios diferentes de escalas en la turbulencia:

- La región integral: contiene las grandes escalas, iguales o mayores que la escala integral  $L$ , a través de las cuales la energía es inyectada al sistema.
- La región inercial: contiene las escalas menores que  $L$  pero mayores que la escala de disipación  $\eta_K$ . En el dominio inercial la ener-

gía fluye de las grandes hacia las pequeñas escalas.

- La región disipativa: contiene las escalas menores que  $\eta_K$  en las cuales la energía es disipada.

La región inercial se caracteriza por una dinámica dominada por el término advectivo sobre el difusivo en las ecuaciones de Navier-Stokes, mientras que en el dominio disipativo el término difusivo domina.

Para poder desarrollar su teoría, Kolmogorov hizo dos hipótesis [3], que pueden ser resumidas como: si el número de Reynolds va al infinito, las pequeñas escalas (escalas menores que la escala integral  $L$ ) de la turbulencia son estadísticamente isotropas e independientes de las grandes escalas [1].

Usando ambas hipótesis de semejanza y análisis fenomenológico, Kolmogorov caracterizó estadísticamente el comportamiento de los incrementos de velocidad en la región inercial de un fluido turbulento [1]:

$$\delta_i v(x) = v_x(x + l) - v_x(x) \approx \epsilon^{1/3} l^{1/3}. \quad (3)$$

La ecuación 3 conduce a comportamientos específicos de leyes de escala de los momentos estadísticos de los incrementos de velocidad [3]:

$$S_p(l) \equiv \langle (\delta_i v)^p \rangle = C_p (l \langle \epsilon \rangle)^{p/3}, \quad (4)$$

donde  $S_p(l)$  son las funciones de estructura,  $p$  es el orden de la función de estructura y  $C_p$  son constantes de universalidad que solo dependen de la función de estructura.

A partir del comportamiento en leyes de escala de la función de estructura de orden dos,  $S_2(l) = C_2 \langle \epsilon^{2/3} \rangle l^{2/3}$ , se obtiene la distribución espectral de energía de un flujo turbulento (Figura 4):

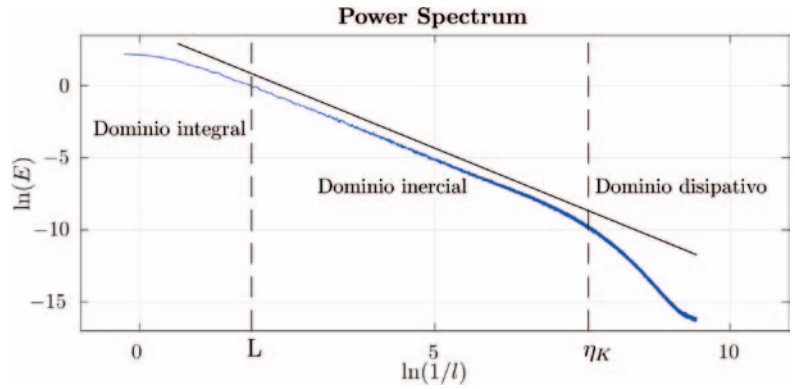
$$E\left(\frac{1}{l}\right) = \alpha \epsilon^{2/3} \left(\frac{1}{l}\right)^{-5/3}. \quad (5)$$

Las relaciones arriba escritas (ecuaciones 3, 4 y 5) son válidas para cualquier escala  $l$  en la región inercial, en la cual no hay ni inyección directa de energía ni disipación directa de energía, sino un flujo de energía  $\Pi$  de la escala integral  $L$  a la escala disipativa  $\eta_K$ . En consecuencia con la ecuación 3, el flujo de energía  $\Pi$  debe ser independiente de la escala e igual a la tasa media de disipación de energía:

$$\Pi \approx \frac{\langle (\delta_i v(x)^3) \rangle}{l} \approx \langle \epsilon \rangle. \quad (6)$$

#### La ley de cuatro quintos

Kolmogorov derivó directamente de las ecuaciones de Navier-Stokes la, *a priori* definición fenomenológica, de la tasa media de disipación de energía hecha en la ecuación 6. De este modo, Kolmogorov obtuvo una relación exacta para la



función de estructura de tercer orden  $S_3(l)$ , que debe ser respetada por cualquier modelo de turbulencia [3]: *En el límite de número de Reynolds infinito, la función de estructura de tercer orden de la turbulencia homogénea e isotropa, evaluada en incrementos  $l$  pequeños comparados con la escala integral, es dada en términos de la tasa media de disipación de energía por*

$$S_3(l) = -\frac{4}{5} \langle \epsilon \rangle l. \quad (7)$$

La ley de cuatro quintos muestra la existencia de una cascada de energía en la turbulencia que va de las grandes escalas hacia las pequeñas.

#### La corrección de Kolmogorov-Oboukhov de 1962

La teoría de Kolmogorov de 1941 asume que *como  $\langle \epsilon \rangle$  es casi constante en las regiones que son pequeñas en comparación con la escala integral  $L$ , cuando  $l \ll L$  se puede suponer que  $\langle \epsilon_i \rangle = \langle \epsilon \rangle$* . Esta hipótesis fue rápidamente contestada por Lev Davidovich Landau (1908-1968), ya que no tiene en cuenta que con el incremento de la proporción  $L/l$  la variación  $\sigma_\epsilon^2$  de la disipación de energía  $\epsilon$  definida en la teoría K41 aumentaría sin límite [4, 5, 1].

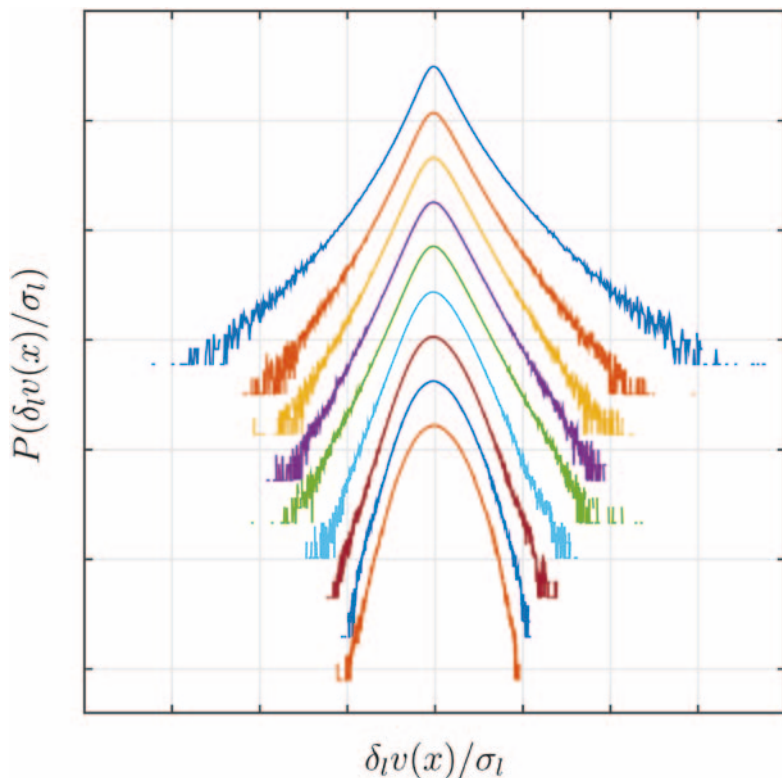
Más tarde llegaría el apoyo experimental a las críticas de la teoría K41, con observaciones que indicaban la inhomogeneidad de la tasa de disipación [6]. En los setenta, experimentos que analizaban la deformación de las funciones de densidad de probabilidad (pdfs) de los incrementos de velocidad a través de las escalas [7] (Figura 5) y más adelante las leyes de escala de las funciones de estructura de orden mayor que 3 [8] corroboraron la inexactitud de la teoría K41.

Ya algunos años antes, Kolmogorov y Oboukhov habían corregido la teoría K41 definiendo una disipación de energía local  $\epsilon_l$  en lugar de una global  $\epsilon$  [5, 6]. Concretamente, definieron  $\epsilon_l$  siguiendo una distribución con estadísticas log-normales y demostraron que en este caso:

$$\delta_i v(x) = v_x(x + l) - v_x(x) \approx (\epsilon_l)^{1/3}, \quad (8)$$

$$S_p(l) = \langle (\delta_i v)^p \rangle = C_p (l \langle \epsilon_l \rangle)^{p/3}. \quad (9)$$

Figura 4. Densidad espectral de energía de la turbulencia (azul). La línea negra ilustra la conocida como ley de 5/3 (eq. (5)).



**Figura 5.** Deformación de la pdf de los incrementos de velocidad a través de las escalas, de Gaussiana a gran escala a fuertemente no Gaussiana a pequeña escala. Para resaltar las diferencias entre las pdfs, el eje y está en escala logarítmica

La consideración de tasas de disipación no constantes conduce a leyes de escala no lineales de los incrementos, y por lo tanto leyes de escala no lineales de las funciones de estructura. Esta no linealidad conlleva una deformación de la pdf de los incrementos de velocidad en función de la escala. La pdf, cercana a una Gaussiana a escalas mayores o iguales a la escala integral  $L$ , desarrolla colas más largas y una asimetría cuando la escala decrece [7]. A este fenómeno se le llama intermitencia.

### El enfoque multifractal de la teoría de Kolmogorov

Uriel Frisch y Giorgio Parisi, tomando como referencia los trabajos sobre fractalidad y multifractalidad de Benoît B. Mandelbrot (1924-2010), generalizaron la teoría de la turbulencia de Kol-

mogorov usando un enfoque multifractal [1]. Para ello, simplemente reformularon el comportamiento en leyes de escala de los incrementos y las funciones de estructura:

$$\delta_\nu(x) \approx l^h, \tag{10}$$

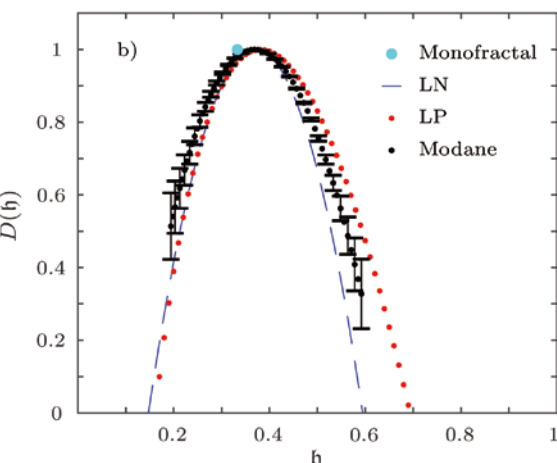
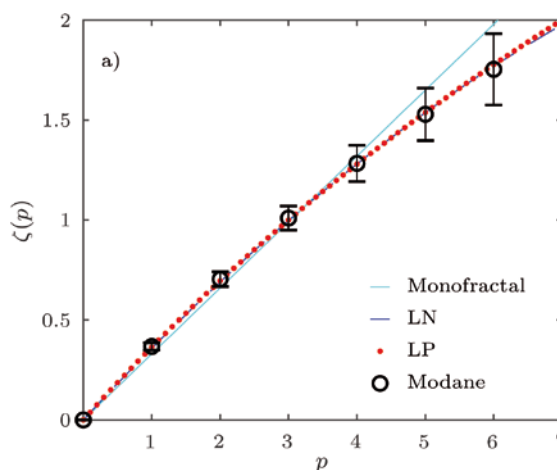
$$S_p(l) \approx l^{\zeta(p)}, \tag{11}$$

donde  $h$  es el exponente de Hölder e indica el orden de las singularidades que caracterizan la velocidad turbulenta, y  $\zeta(p)$  define los exponentes de escala de la velocidad de un flujo turbulento.  $D(h)$  es el espectro de singularidades e indica la probabilidad de encontrar el exponente de Hölder  $h$  [1]. Cualquier modelo se caracterizará por lo tanto por el conjunto de sus exponentes de escala  $\zeta(p)$  (Figura 6 a), y su espectro de singularidades (Figura 6 b), los cuales están relacionados por la transformada de Legendre [1] y por lo tanto aportan dos visiones de un mismo fenómeno. Por último, la ley de cuatro quintos de Kolmogorov impone  $\zeta(3) = 1$ .

Un comportamiento lineal de los exponentes de escala en función de  $p$  caracteriza un proceso monofractal. En este caso, a la pendiente de la recta  $c = h$  se le llama exponente de Hurst, y se escribe  $\mathcal{H}$ , es decir, el orden de las singularidades del proceso es único e igual a  $\mathcal{H}$ . Por otro lado, un comportamiento no lineal de los exponentes de escala, i. e. la existencia de singularidades de distintos ordenes (múltiples valores posibles de  $h$ ), revela la existencia de multifractalidad (intermitencia en términos de física de fluidos) (Figura 6). Intuitivamente podemos relacionar la univocidad del orden de las singularidades  $h = \mathcal{H} = cte$  con la existencia de una tasa de disipación media  $\langle \epsilon \rangle$  y la existencia de singularidades de distinto orden  $D(h)$  con la existencia de una tasa de disipación local  $\epsilon_r$ .

La teoría de Kolmogorov de 1941 enuncia  $h \equiv \mathcal{H} = 1/3$ , lo que sitúa al comportamiento multiescala de la turbulencia en un régimen mono-

**Figura 6. a)** Exponentes de escala  $\zeta(p)$  en función de  $p$  y **b)** espectro de singularidades  $D(h)$  en función del exponente de Hölder  $h$ , ambos para tres modelos diferentes de la turbulencia en la región inercial, junto con una medida experimental de velocidad turbulenta (Modane, símbolos negros). Los modelos son: movimiento Browniano fraccionario monofractal (cyan, línea continua), modelo multifractal log-normal (azul, línea discontinua) y modelo multifractal log-Poisson (rojo, línea punteada).



fractal. Esta consideración implica que: 1)  $D(h) = \delta(h - 1/3)$  es una función univaluada (Figura 6 b). 2) Los exponentes de escala son lineales en función de  $p$ ,  $\zeta(p) = p\mathcal{H} = \frac{p}{3}$  (Figura 6 a). 3) Las propiedades estadísticas de los incrementos permanecen inalteradas a través de las escalas (auto semejanza).

La figura 6 a) muestra que, cuando  $p$  aumenta, los exponentes de escala de una medida experimental de velocidad turbulenta se desvían del comportamiento lineal predicho por el modelo monofractal. Por lo tanto, el modelo K41 de la turbulencia no es satisfactorio a gran  $p$ . Es necesario introducir correcciones ligadas a la intermitencia que dan un estatus multifractal a la turbulencia. Existen diferentes modelos multifractales, cada uno de los cuales describe la intermitencia de manera ligeramente distinta. Entre los modelos más famosos encontramos el modelo log-normal y el modelo log-Poisson.

### Conclusión

En 1941 Kolmogorov sentó las bases de una teoría estadística de la turbulencia capaz de describir la naturaleza multiescala de la misma. Esta teoría tiene en cuenta la existencia de tres dominios de escalas regidos por fenómenos físicos diferenciados, es capaz de caracterizar la distribución de energía a través de las escalas de la turbulencia, así como de predecir la existencia de una cascada de energía que se dirige de las grandes escalas hacia las pequeñas. Veinte años más tarde, él y Oboukhov mejoraron la teoría de 1941 para tener en cuenta la naturaleza intermitente de la disipación de energía. Todas estas propiedades de la turbulencia descritas por la teoría K41 y más tarde por la teoría KO62 han sido comprobadas experimentalmente.

Hicieron falta 44 años para que Frisch y Parisi generalizaran la descripción de la turbulencia hecha por Kolmogorov, y desarrollaran el formalismo multifractal, que permite describir tanto la teoría de Kolmogorov 1941 como la teoría de Kolmogorov-Oboukhov de 1962. Este formalismo es también capaz de caracterizar teorías físicas modernas como el modelo  $\beta$  o el modelo She-Leveque de la turbulencia [1]. Más allá, el formalismo multifractal es un marco genérico basado en la caracterización del orden de las singularidades del proceso estudiado y, por lo tanto, es aplicable al estudio de todo tipo de señales experimentales. Una objeción posible al formalismo es que se aleja de la física del fenómeno estudiado. Sin embargo, provee un marco ideal para la caracterización estadística de medidas experimentales de procesos y sistemas multiescala, como es el caso de la turbulencia.

Este artículo presenta una descripción de la turbulencia basada en los fenómenos de invari-

anza de escala y auto semejanza partiendo de la pionera teoría de Kolmogorov. No obstante, vale la pena mencionar otros enfoques de la turbulencia, en concreto, la descripción basada en la teoría de sistemas dinámicos que busca relacionar turbulencia y caos, y que permite integrar auto semejanza y multifractalidad [9, 10].

### Agradecimientos

Por las múltiples e interesantes discusiones en torno al tema de la turbulencia, a Laurent Chevillard, Stéphane Roux, Nicolas Garnier y Rafael Granero-Belinchón.

### Referencias

- [1] U. FRISCH, *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov* (Cambridge University Press, 1995).
- [2] L. F. RICHARDSON, "Some Measurements of Atmospheric Turbulence", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing papers of a Mathematical or Physical Character* 221:1-28, 1921.
- [3] A. N. KOLMOGOROV. The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Numbers", *Proceedings: Mathematical and Physical Sciences* 434(1890):9-13, 1991.
- [4] L. D. LANDAU y E. M. LIFSHITZ, *Mecánica de fluidos. Volumen 6* (Editorial Reverté, 2009).
- [5] A. N. KOLMOGOROV, A Refinement of Previous Hypotheses Concerning the Local Structure of Turbulence in a Viscous Incompressible Fluid at High Reynolds Number, *Journal of Fluid Mechanics* 13:82-85, 5 1962.
- [6] A. M. OBOUKHOV, "Some Specific Features of Atmospheric Turbulence", *Journal of Fluid Mechanics* 13:77-81, 5 1962.
- [7] H. TENNEKES y J. C. WYNGAARD, The Intermittent Small-Scale Structure of Turbulence: Data-Processing Hazards, *J. Fluid Mech* 55:93-103, 1972.
- [8] F. ANSELMET, Y. GAGNE, E. J. HOPFINGER y R. A. ANTONIA, High-Order Velocity Structure Functions in Turbulent Shear Flow, *Journal of Fluid Mechanics* 140:63-89, 1984.
- [9] D. RUELLE y F. TAKENS, On The Nature of Turbulence, *Communications in Mathematical Physics* 20:167-192, 1971.
- [10] T. BOHR, M. JENSEN, G. PALADIN y A. VULPIANI, *Dynamical Systems Approach to Turbulence*. Cambridge Nonlinear Science Series (Cambridge, Cambridge University Press, 1998).

**Carlos Granero-Belinchón**

IMT Atlantique, Lab-STICC UMR  
CNRS, Technopôle Brest Iroise,  
29239 Brest, Francia

